Distanza di un punto da un piano

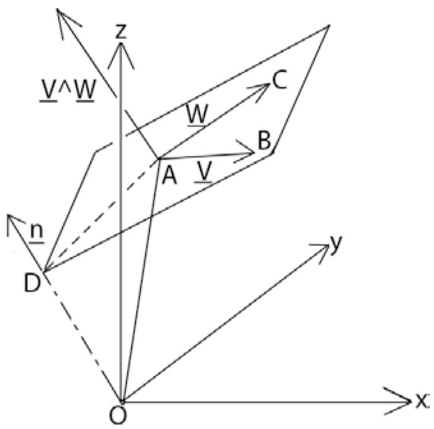
Come esempio di applicazione del metodo vettoriale, ricaviamo la formula per la distanza di un punto da un piano.

Consideriamo un punto $P=(xp,yp,zp)$ ed un piano definito dai due vettori $\underline{V} \equiv (vx,vy,vz)$, $\underline{W} \equiv (wx,wy,wz)$, uscenti dal punto di applicazione: $A \equiv (xa,ya,za)$.
In altri termini il piano si appoggia sui tre punti:
$A \equiv (xa,ya,za)$, $B \equiv (xa+vx,ya+vy,za+vz)$, $C \equiv (xa+wx,ya+wy,za+wz)$.
Se fossero invece date le coordinate di questi punti avremmo:
$vx=xb-xa$, $vy=yb-ya$, $vz=zb-za$, $wx=xc-xa$, $wy=yc-ya$, $wz=zc-za$

Se non utilizzassimo il metodo vettoriale, per determinare la distanza tra P ed il piano potremmo utilizzare l'intersezione con la sfera centrata in P con raggio parametrico r , metodo che però conduce a calcoli algebrici molto tortuosi. Dovremmo prima esprimere il piano nella forma cartesiana: $a*x+ b*y+ c*z+ d=0$.
Per farlo occorre risolvere, eliminando i parametri u,v, il sistema che definisce l'equazione parametrica del piano, inteso come doppio fascio costituito dalle rette parallele a $\underline{V}$ e $\underline{W}$ ed attraversanti rispettivamente gli assi per i segmenti AB, AC:

$x= xa+ u*vx+ v*wx$
$y= ya+ u*vy+ v*wy$
$z= za+ u*vz+ v*wz$
(si noti che per $u=0$ si ricava, al variare di v, l'asse per AC; per $u=v=0$ si ha il punto di applicazione A; per $u=0$, $v=1$ si ottiene il punto C)

$a=vy*wz-wy*vz$
$b=vz*wx-wz*vx$
$c=vx*wy-wx*vy$
$d=-xa*(vy*wz-wy*vz)-ya*(vz*wx-wz*vx)-za*(vx*wy-wx*vy)$



Notiamo che il vettore (a,b,c) esprime il vettore normale al piano, costituito dal prodotto vettoriale $\underline{V}$^$\underline{W}$, mentre il termine $-d$ esprime il prodotto scalare tra tale vettore e il vettore OA, pertanto $-d$ rappresenta la distanza, con segno, del piano dall'origine O moltiplicata per il modulo del prodotto vettoriale $\underline{V}$^$\underline{W}$.
In altri termini la formulazione cartesiana del piano equivale a:
$\underline{V}$^$\underline{W}$ * OP = $\underline{V}$^$\underline{W}$ * OA

Se indichiano con $\underline{n}$ il versore normale al piano, dividendo entrambi i membri per il modulo di $\underline{V}$^$\underline{W}$ possiamo scrivere:
$\underline{n}$ * OP = $\underline{n}$ * OA

Ovvero le proiezioni ortogonali sulla retta normale per O al piano di ogni punto P devono coincidere con la proiezione ortogonale D sulla stessa retta del punto di applicazione A, che pure appartiene al piano.

Ritornando al problema della distanza del piano dal punto P, dovremmo considerare l'intersezione di questo con la sfera centrata in P:

$(x-xp)^2+(y-yp)^2+(z-zp)^2-r^2=0$
$a*x + b*y + c*z + d=0$

Il sistema delle due equazioni, nello spazio cartesiano, rappresenta una ellisse (anche immaginaria) che degenera in un punto quando il valore r corrisponde alla distanza di P dal piano. Eliminando, ad esempio, z, si ricava la proiezione di detta ellisse su un piano coordinato: il piano xy in questo caso. Occorre poi imporre che l'ellisse sia degenere, cosa che avviene quando il suo discriminante è nullo.

Oppure, nell'equazione della sfera, potremmo sostituire i valori x,y,z con l'espressione in u,v del piano in forma parametrica. Poi potremmo imporre che il valore r^2 risulti stazionario eguagliando a 0 le derivate parziali in u,v della espressione:
(x-xp)^2+ (y-yp)^2+ (z-zp)^2 (dove x,y,z vanno intese in funzione di u,v)
In tal modo si ricavano pure i valori di u,v corrispondenti al punto Q del piano posto a minima distanza da P.

Il metodo più spedito rimane, comunque, quello vettoriale Tramite il prodotto vettoriale dei due vettori che definiscono la giacitura del piano, ricaviamo un vettore ortogonale al piano medesimo:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ vx & vy & vz \\ wx & wy & wz \end{vmatrix} = \underline{i}*(vy*wz-wy*vz)+\underline{j}*(vz*wx-wz*vx) +\underline{k}*(vx*wy-wx*vy)$$

Dunque, come avevamo già considerato: V^W≡(a,b,c)≡(vy*wz-wy*vz, vz*wx-wz*vx, vx*wy-wx*vy).

Il versore normale al piano risulta: n ≡(a,b,c)/sqr(a^2+ b^2+ c^2)

Pertanto la proiezione ortogonale lungo il versore n del vettore AP fornisce la distanza r, con segno, richiesta:

r=n*AP =(a*(xp-xa) + b*(yp-ya) + c*(zp-za))/sqr(a^2 + b^2 + c^2)

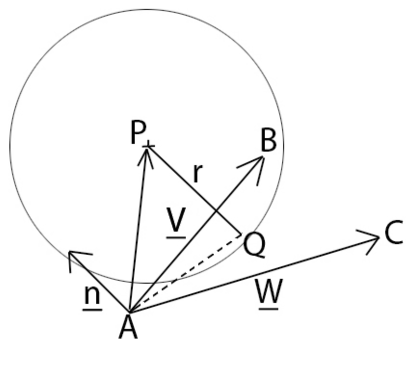
dove: a=vy*wz-wy*vz, b=vz*wx-wz*vx, c=vx*wy-wx*vy

Considerato che:

d=-a*xa-b*ya-c*za

otteniamo la classica **formula della distanza r di P dal piano** a*x+ b*y+ c*z+ d=0 :

vx=xb-xa
vy=yb-ya
vz=zb-za
wx=xc-xa
wy=yc-ya
wz=zc-za
a=vy*wz-wy*vz
b=vz*wx-wz*vx
c=vx*wy-wx*vy
d=-a*xa-b*ya-c*za



r = abs(a*xp + b*yp + c*zp + d)/sqr(a^2 + b^2 + c^2)

Il punto Q di minima distanza si ricava dalla formula:

OQ=OP+r*n=(xp+ r*a/sqr(a^2+ b^2+ c^2),yp+ r*b/sqr(a^2+ b^2+ c^2),zp+ r*c/sqr(a^2+ b^2+ c^2))