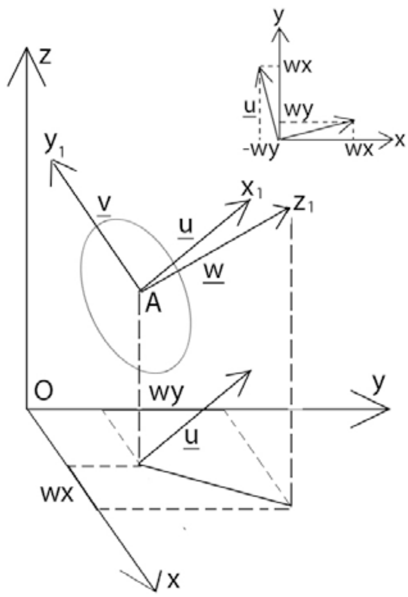
Tracciare curve su piani obliqui

Consideriamo un piano inclinato, che attraversa un dato punto A≡ (xa,ya,za) e la cui giacitura sia definita dal versore normale $\underline{w}$≡ (wx,wy,wz).
Tale piano disterà allora dall'origine (con segno) del valore d=xa*wa+ ya*wy+ za*wz e pertanto avrà equazione cartesiana: OP*$\underline{w}$=d ovvero x*wa+ y*wy+ z*wz=d.

Per tracciare una curva su detto piano, occorre costruire un sistema di riferimento ausiliario riferito al piano medesimo.
Come versore corrispondente alle quote utilizziamo il versore normale dato $\underline{w}$≡ (wx,wy,wz).
Come versore $\underline{u}$ corrispondente alle ascisse utilizziamo il versore parallelo al piano orizzontale ed ortogonale a $\underline{w}$.
Per ottenerlo consideriamo la proiezione ortogonale di $\underline{w}$ sul piano coordinato xy, essa è data dal vettore (wx,wy,0), pertanto il versore richiesto sarà (−wy/m, wx/m,0), dove per m intendiamo il modulo di (wx,wy,0): m=sqr(wx^2+ wy^2)
Per ricavare il terzo $\underline{v}$ versore relativo alle ordinate sfruttiamo il prodotto vettoriale $\underline{w}$^$\underline{u}$.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ wx & wy & wz \\ -wy/m & wx/m & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}*(-wx*wz/m) + \underline{j}*(-wy*wz/m) + \underline{k}*(m\hat{}2/m)$$



In conclusione la terna di versori che definisce il nuovo sistema è:

$\underline{u}$=(−wy/m, wx/m, 0)
$\underline{v}$=(−wx*wz/m,−wy*wz/m, m)
$\underline{w}$=(wx, wy, wz)

Consideramo ora una curva parametrica in t , definita sul piano dato, riferita al sistema relativo x_1,y_1 sul piano con origine A ed assi $\underline{u}$, $\underline{v}$:
x_1= f(t)
y_1= g(t)

Rispetto le coordinate assolute x, y, z il punto generico P della curva avrà equazione: OP=OA+$\underline{u}$*f(t)+$\underline{v}$*g(t)
x = xa −wy/m*f(t) −wx*wz/m*g(t)
y = ya + wx/m*f(t) −wy*wz/m*g(t)
z = za + m*g(t)

Nota: se il punto P≡ (x,y,z). non appartiene al piano, le equazioni di trasformazione si ricavano da:
OP=OA+$\underline{u}$*x_1+$\underline{v}$*y_1+$\underline{w}$*z_1

x = xa −wy/m*x_1 −wx*wz/m*y_1+ wx*z_1
y = ya + wx/m*x_1−wy*wz/m*y_1+ wy*z_1
z = za + m*y_1+ wz*z_1

Le trasformazioni inverse (si scambiano righe e colonne):
x_1 =−wy/m*(x−xa) + wx/m*(y−ya)
y_1 =−wx*wz/m*(x−xa) −wy*wz/m*(y−ya) + m*(z−za)
z_1 = wx *(x−xa) + wy*(y−ya) + wz*(z−za)

Numeri complessi

I numeri complessi non vengono utilizzati direttamente nel linguaggio GDL. Essi corrispondono a vettori bidimensionali, cui viene applicato un prodotto particolare che esprime le rotazioni. Pertanto, invece di consultare ogni volta un prontuario di trigonometria o di calcolo vettoriale, le formule sugli angoli possono essere dedotte con questo metodo.
Un numero complesso si esprime come:
$a+ i*b \equiv (a,b)$
dove a è la parte reale, da segnare sull'asse x, e b e la parte detta immaginaria, da segnare sull'asse y.
Il simbolo i, in questo caso, non esprime un numero, ma piuttosto il versore della coordinata y.
Il prodotto tra due numeri complessi si ricava sommando gli angoli dei due vettori rispetto l'asse x (azimut) e moltiplicandone i moduli. Il numero complesso $0+ i*1= i =(0,1)$ moltiplicato per se stesso fornisce dunque: $i*i=(-1,0)=-1$. Per questo si usa la notazione apparentemente assurda: $i = \sqrt{-1}$, ovvero $i^2=-1$

Per ricavare la rotazione del vettore (x,y) di an gradi attorno all'origine, basterà allora moltiplicare tale vettore, inteso come numero complesso, per il versore:

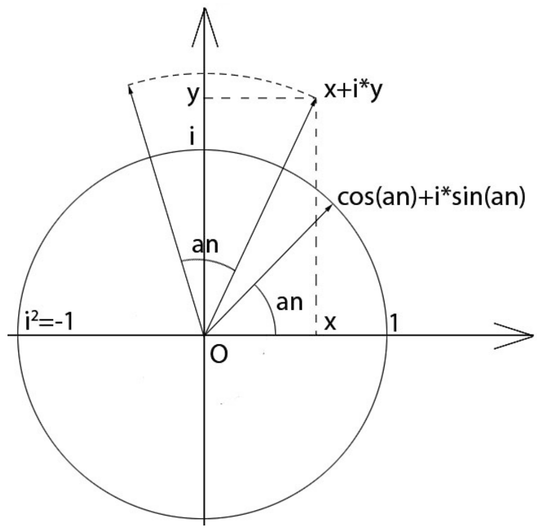
$(\cos(an) , \sin (al)) \equiv \cos(an)+ i* \sin (al)$

In tal modo non varia il modulo di (x,y), ma il suo azimut cresce di al :

$(x+ i*y)*(\cos(an)+ i*\sin(an))=x*\cos(an)+ i*i*y*\sin(an)+ i*x*\sin(an)+ i*y*\cos(an)=$
$x*\cos(an)-y*\sin(an)+ i*(x*\sin(an)+ y*\cos(an))=xr+ i*yr$

Ovvero otteniamo la formula della rotazione, dove i valori xr, yr sono le nuove coordinate del punto ruotato del valore angolare an in senso antiorario:

$xr = x*\cos(an)-y*\sin(an)$
$yr = x*\sin(an)+ y*\cos(an)$



Come ulteriore esercizio calcoliamo:

$\cos(2*al)$ e $\sin(2*al)$

risulta:

$(\cos(an) + i* \sin (al)).* (\cos(an) + i* \sin (al)).= (\cos(2*an) , \sin (2*al))$
Infatti, per effetto della rotazione, l'azimut cresce di al, applicando poi la formula testé trovata sulla rotazione di al, avremo dunque:

$\cos (2*an) = \cos(an)^2 - \sin(an)^2$
$\sin (2*an) = 2 * \cos(an) * \sin(an)$

In modo analogo si ricavano le formule:

$\cos(be+ an)=\cos(be)*\cos(an)-\sin(be)*\sin(an)$
$\sin(be+ an)=\cos(be)*\sin(an)+ \sin(be)*\cos(an)$