Prospettive incurvate tramite riduzione dell'angolo visuale

Illustro un modo per ottenere in via analitica prospettive curve, senza sfruttare la doppia proiezione sulla sfera. Il punto oggetto dello spazio ed il punto prospettico sul quadro sono intercettati dal medesimo raggio visivo, il quale è evidentemente determinato da due valori angolari al e be. Il valore al, che in coordinate polari o sferiche potrebbe essere considerato l'anomalia o lo zenit, determina sul quadro l'inclinazione del raggio uscente dal punto principale. Assumendo il punto di vista nell'origine O, con l'asse ottico coincidente con l'asse coordinato y e il quadro con equazione y=r, dove r rappresenta la distanza prospettica, avremo:

al=acs(x/sqr(x^2+z^2))*(sgn(z)-abs(sgn(z))+1)

dove (x,y,z) è la terna di coordinate del punto spaziale oggettivo P.

Ho moltiplicato il valore dell'arcocoseno per la funzione:

f(z)= sgn(z)-abs(sgn(z))+1

Questa funzione assume valore 1 per z>=0, altrimenti vale -1.

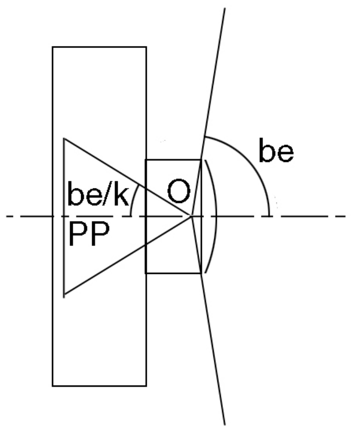
In questo modo l'angolo al può assumere i valori negativi relativi al terzo e quarto quadrante.

Il valore be corrisponde all'angolo tra raggio visuale ed asse ottico, al suo variare il punto immagine P' scorre lungo il raggio uscente dal punto principale. Risulta:

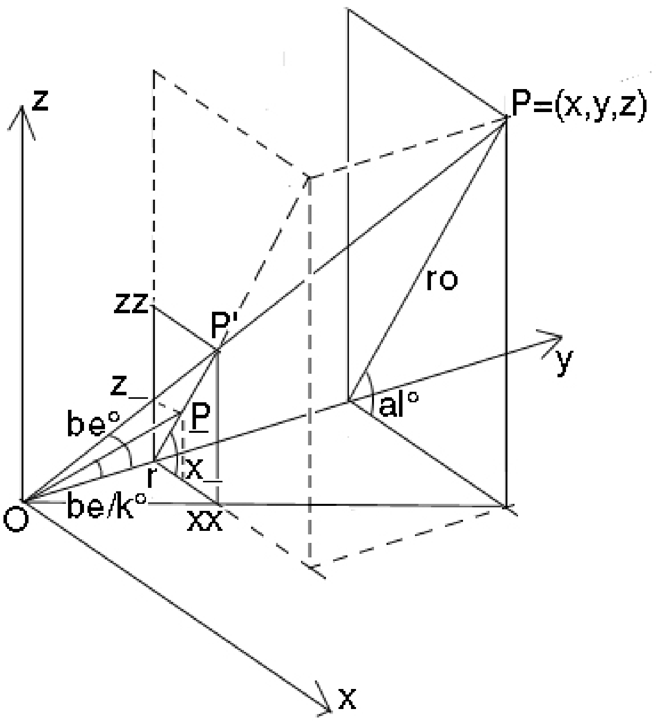
be=acs(y/sqr(x^2+ y^2+z^2))

Evidentemente be non risulta definito soltanto sull'origine o punto di vista, ove sqr(x^2+ y^2+z^2)=0

Per ottenere una prospettiva curva, a partire dalla prospettiva lineare, basterà sostituire sul quadro il valore be con un valore ad esso proporzionale, quale be/k.



Schema di camera fotografica con applicato un obiettivo tipo fish-eye. L'angolo di ripresa che può raggiungere i 180° ed oltre non può corrispondere all'angolo di proiezione (ridotto) sul piano pellicola PP, al cui centro si trova il punto principale. Il punto di vista corrisponde al centro nodale O dell'obbiettivo.



Indicando con xx, zz le coordinate del punto prospettico sul quadro P’ e con ro, rro i valori radiali rispettivamente del punto oggetto P e del punto immagine P’, avremo:

ro=sqr(x^2+z^2)), rro=sqr(xx^2+zz^2))

xx/x= zz/z=rro/ro=r/y

da cui si ricavano pure le formule canoniche della prospettiva 2D lineare:

xx=x/y*r, zz=z/y*r

Variando l’angolo be muta la componente radiale dell’immagine prospettica:

r_o=r*tan(be/k) al posto di rro= r*tan(be)

I nuovi valori della prospettiva curva risultano essere:

x_= r_o /rro*xx, z_= r_o /rro*zz

da cui si deduce:

x_= r*x*tan(acs(y/sqr(x^2+ y^2+z^2))/k)/ sqr(x^2+z^2)

z_= r*z*tan(acs(y/sqr(x^2+ y^2+z^2))/k)/ sqr(x^2+z^2)

Se sqr(x^2+z^2)=0 risulta sempre: x_= z_= 0 (punto oggetto sull’asse ottico).

Queste sono le formule di trasformazione che associano ad ogni punto spaziale P≡ (x,y,z) la sua immagine prospettica P≡ (x_,z_) sul quadro.
In base al valore assunto da k varia la tipologia prospettica.

Il valore k contrae l'immagine prospettica lineare, sostituendo l'angolo di ripresa be,

misurato sull'asse ottico y, con il nuovo angolo be/k.

I punti immagine scorrono lungo il medesimo asse uscente dal punto principale PP:

per k>1 si avvicinano al PP (grandangolo fish-eye)

per k<1 si allontanano dal PP (distorsione a fazzoletto)

Con k=2 otterremo un risultato analogo alla prospettiva stereografica. Infatti l’angolo di ripresa passerà dai 180° (valore limite sul piano con estensione infinita della prospettiva lineare) ai 360°.

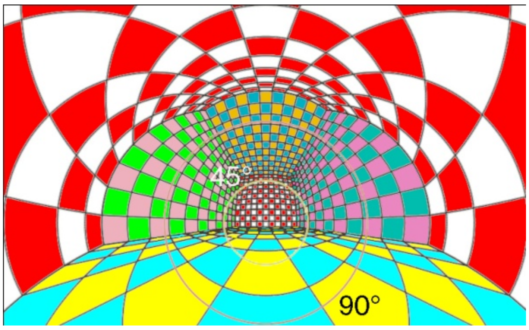
Questo fa sì che i punti posti sull'asse ottico dietro l'osservatore (y negativi) si trasformano nella retta impropria.

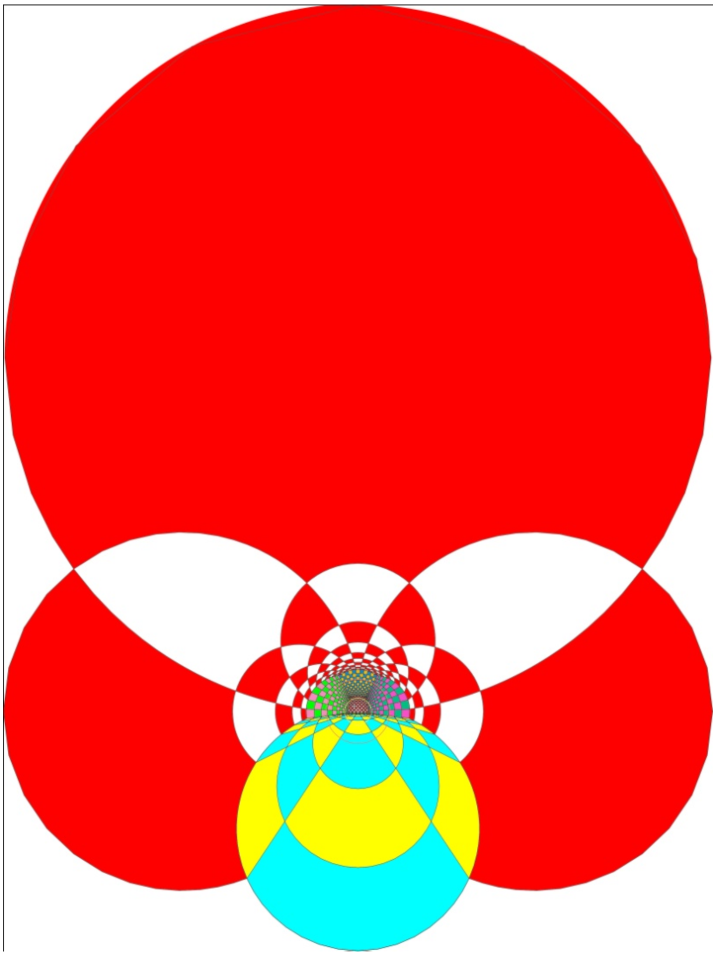
Per k>2 il cerchio di definizione a 360° diventa proprio, così che ogni punto sul retro viene distribuito su tale cerchio.

Per k<=1 (prospettiva lineare o distorsione a fazzoletto) occorre che i punti oggetto siano anteposti all'osservatore (y>0).

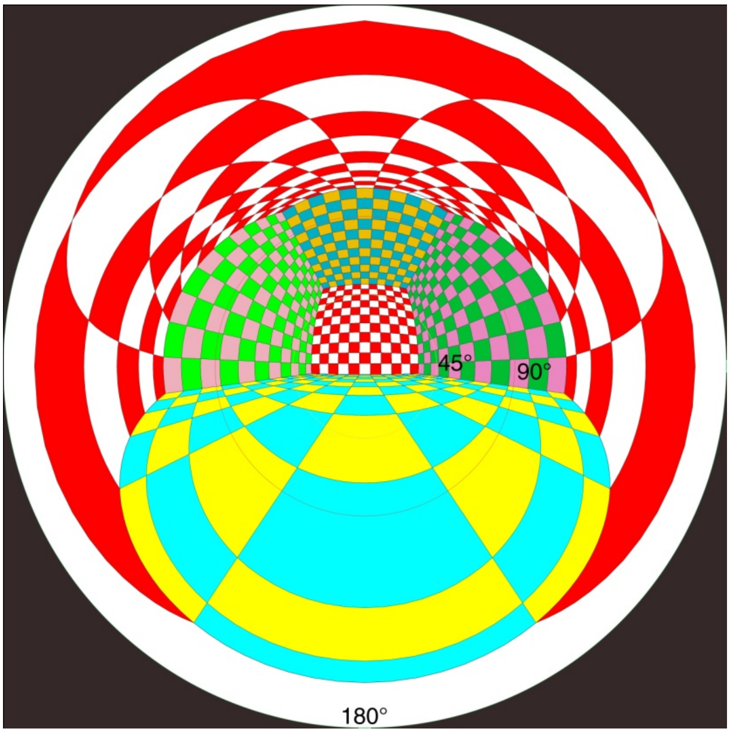
Per non avere distorsioni a fazzoletto eccessive, k deve essere scelto vicino a 1.

Dalle verifiche con il programma, sembra che per k=2 le rette si trasformino proprio in cerchi: lasciamo ai matematici l'eventuale dimostrazione che queste formule equivalgono in effetti a quelle dedotte con la proiezione dalla sfera (almeno nel caso stereografico).

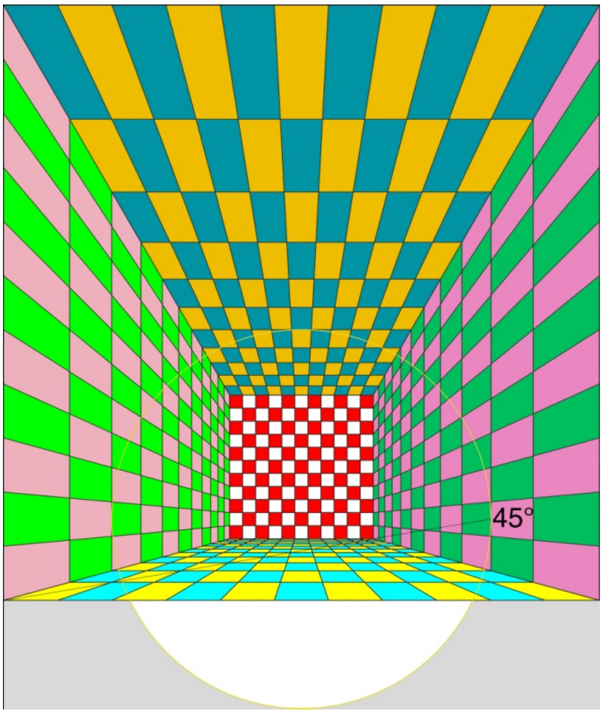


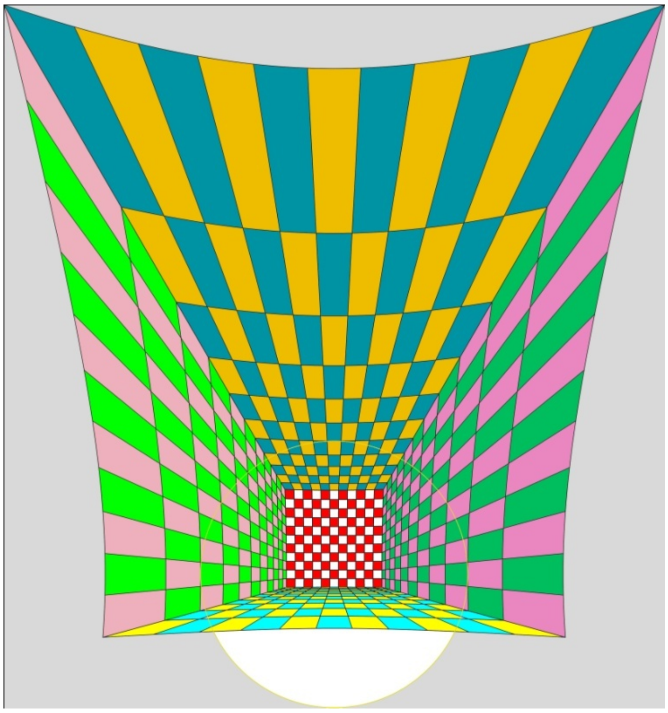


Struttura scatolare vista dall'interno con k=2. Le pareti anteriore e posteriore sono a scacchi rossi e bianchi. Quella anteriore viene fortemente ridotta, mentre quella posta dietro l'osservatore è fortemente aberrata. Il riquadro bianco posto dietro il punto di vista si estende fino all'infinito, mentre i suoi bordi sono i lobi che racchiudono l'immagine. Il pavimento è a quadrati azzurri e gialli, il suo bordo posteriore si gonfia verso il basso, seguendo un contorno circolare a bolla.
Nel particolare si evidenziano il cerchio di distanza a 45° e il cerchio a 90° dove sono situati i punti di fuga laterali delle rette frontali.



A sinistra fish-eye a 360° ottenuto con valore k=4. Il cerchio esterno corrisponde a be=180° ed intercetta sul quadro un angolo effettivo di 45°, pertanto il suo raggio corrisponde alla distanza r. Tale cerchio corrisponde ad un unico punto della struttura scatolare, entro la quale è situato l'osservatore. Si tratta del punto intercettato sulla parete posteriore dall'asse ottico.





Per k=1 si riottiene la prospettiva lineare.

Con k<1 (k=0,9 nell'esempio) si ha la distorsione concava.

La medesima struttura, posta alla stessa distanza oltre il quadro, con k=8