Distanza di un punto da una retta

Consideriamo una retta definita dal vettore $\underline{V} \equiv (vx,vy,vz)$ uscente dal punto di applicazione: $A \equiv (xa,ya,za)$, ovvero sia data la retta individuata dal segmento AB, dove $B \equiv (xb,yb,zb) \equiv (xa+vx,ya+vx,za+vx)$.
Sia $C \equiv (xc,yc,zc)$ un punto esterno alla retta. Vogliamo determinare la distanza r tra il punto C e la retta data.

Sia $P \equiv (x,y,z)$ un punto generico della retta, esso dovrà soddisfare, per un determinato valore u, l'equazione:
$OP=OA+u*\underline{V}$ ovvero $(x,y,z) = (xa + u*vx,ya + u*vy,za + u*vz)$

La distanza d tra P e C vale:

$$d = |CP| = sqr((x-xc)^2+ (y-yc)^2+ (z-zc)^2)$$

La distanza minima corrisponde al valore r cercato, pertanto basterà derivare rispetto u e porre la derivata nulla.
Per semplicità di calcolo deriviamo il quadrato di d :

$$d^2=(xa+u*vx-xc)^2+(ya+u*vy-yc)^2+ (za+u*vz-zc)^2$$

$$\partial\ d^2 / \partial u = 2*(xa+u*vx-xc)*vx+2*(ya+u*vy-yc)*vx + 2*(za+u*vz-zc)*vx=0$$

$$u = ((xc-xa)*vx+(yc-ya)*vy+(zc-za)*vz)/(vx^2+vy^2+vz^2) = AC*\underline{V}/|\underline{V}|^2$$

Con questo valore di u si identifica sulla retta il punto Q di minima distanza da C.

Il punto Q poteva essere trovato direttamente senza scomodare la geometria differenziale. Infatti esso si può ottenere tramite il prodotto scalare del vettore AC con il versore $\underline{w} = \underline{V}/|\underline{V}|$ della retta data, che ci fornisce direttamente la lunghezza del segmento AQ :

$$|AQ| = AC*\underline{V}/|\underline{V}| =((xc-xa)*vx+(yc-ya)*vy+(zc-za)*vz)/sqr(vx^2+vy^2+vz^2)$$

$$OQ=OA+|AQ|*\underline{w}$$

ovvero, posto:

$$u = ((xc-xa)*vx+(yc-ya)*vy+(zc-za)*vz)/(vx^2+vy^2+vz^2)=|AQ|/|\underline{V}| :$$

$xq=xa+u*vx$
$yq=ya+u*vy$
$zq=za+u*vy$

Dunque la distanza d richiesta sarà:

$$d = sqr((xq-xc)^2+(yq-yc)^2+(zq-zc)^2)$$
$$d = sqr((xa-xc+u*vx)^2+(ya-yc+u*vy)^2+(za-zc+u*vy)^2)$$

$$xa-xc+u*vx =((xa-xc)*(vx^2+vy^2+vz^2)+u*(vx^2+vy^2+vz^2)*vx)/(vx^2+vy^2+vz^2)$$

$$(xa-xc)*(vx^2+vy^2+vz^2)+u*(vx^2+vy^2+vz^2)*vx=$$
$$(xa-xc)*(vy^2+vz^2)+(yc-ya)*vy*vx + (zc-za)*vz*vx$$

$$xa-xc+u*vx =((xa-xc)*(vy^2+vz^2)-(ya-ya)*vy*vx -(za-zc)*vz*vx)/(vx^2+vy^2+vz^2)$$
$$ya-yc+u*vy =((ya-yc)*(vz^2+vx^2)-(za-zc)*vz*vy -(xa-xc)*vx*vy)/(vy^2+vz^2+vx^2)$$
$$za-zc+u*vz =((za-zc)*(vx^2+vy^2)-(xa-xc)*vx*vz -(ya-yc)*vy*vz)/(vz^2+vx^2+vy^2)$$

Pertanto, posto:

a1=(xa-xc)*(vy^2+ vz^2)-(ya-yc)*vy*vx -(za-zc)*vz*vx
a2=(ya-yc)*(vz^2+ vx^2)-(za-zc)*vz*vy -(xa-xc)*vx*vy
a3=(za-zc)*(vx^2+ vy^2)-(xa-xc)*vx*vz -(ya-yc)*vy*vz

d = sqr(a1^2+ a2^2+ a3^2)/(vx^2+ vy^2+ vz^2)

Nel caso piano risulta   za=zc   e   vz=0 :

a1=(xa-xc)*vy^2-(ya-yc)*vy*vx= ((xa-xc)*vy-(ya-yc)*vx)*vy
a2=(ya-yc)*vx^2-(xa-xc)*vx*vy=-((xa-xc)*vy-(ya-yc)*vx)*vx
a3=0

d = sqr(a1^2+ a2^2)/(vx^2+ vy^2)

d=abs((xa-xc)*vy-(ya-yc)*vx)/sqr(vx^2+ vy^2)

Infatti, nel caso piano, il versore normale a V risulta essere :
n≡ (-vy/ sqr(vx^2+ vy^2), vx/ sqr(vx^2+ vy^2))

La distanza, con segno, dal punto prefissato C rispetto la retta si potrà allora ottenere proiettando il vettore AC lungo n :

d=AC*n=(xc-xa,yc-ya,zc-za)*(-vy,vx)/sqr(vx^2+ vy^2)=((xa-xc)*vy-(ya-yc)*vx)/sqr(vx^2+ vy^2)

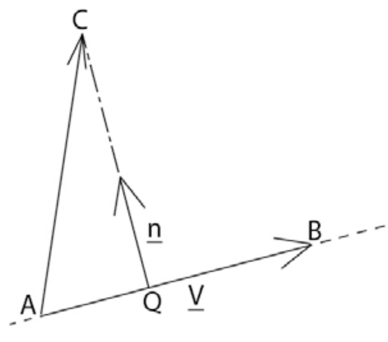
Se la retta viene espressa nella forma cartesiana: a*x+ b*y+ c=0 avremo:

x= xa + u*vx
y= ya + u*vy

u=(x-xa)/vx, y= ya + (x-xa)/vx*vy,   -vy*x + vx*y - xa*vy + ya*vx =0

dunque:

a=-vy
b= vx
c= xa*vy -ya*vx



La formula :

d = ((xa-xc)*vy-(ya-yc)*vx)/sqr(vx^2+ vy^2)

d = (-vy*xc+ vx*yc+ xa*vy-ya*vx)/sqr(vy^2+ vx^2)

diventa allora:

d = (a*xc+ b*yc+ c) / sqr(a^2+ b^2)

che è la formula classica della distanza tra piano e punto, ridotta dallo spazio 3D al piano 2D, dove il piano viene appunto sostituito dalla retta, scalando una dimensione.